

1. Μια τεχνική εταιρεία που πρέπει να παραδώσει ένα μεγάλο έργο μέσα στα επόμενα δύο χρόνια, χρειάζεται 200 επιπλέον φορτηγά. Τα φορτηγά αυτά, είτε θα τα αγοράσει πληρώνοντας 140 χρηματικές μονάδες ανά φορτηγό, είτε θα τα νοικιάσει με ετήσιο κόστος 80 χ.μ. ανά φορτηγό. Τα χρήματα για την αγορά των φορτηγών θα πρέπει να καταβληθούν με την έναρξη του έργου αλλά αυτά της ενοικιάσής τους σε δύο δόσεις (στην αρχή της κάθε χρονιάς). Ξεκινώντας το έργο, η εταιρεία έχει στη διάθεσή της για αγορά και/ή ενοικίαση φορτηγών ένα ποσό ύψους 8000 χ.μ. Επιπλέον, μπορεί να εκμεταλλευτεί τη δυνατότητα δανεισμού που εξασφάλισε: ετήσιο δάνειο μέχρις 20000 χ.μ. με τόκο 16% αλλά με την υποχρέωση αποπληρωμής του στο τέλος της χρονιάς. Τα ετήσια κέρδη για την εταιρεία από το κάθε φορτηγό, εκτιμήθηκαν στις 120 χ.μ. και χρησιμοποιούνται αποκλειστικά στη διαδικασία ενοικίασης φορτηγών και εξόφλησης του δανείου που πάρθηκε. Να υποδειχθεί ένα π.γ.π. για την εύρεση του τρόπου προμήθειας των φορτηγών, ο οποίος να ελαχιστοποιεί το συνολικό τους κόστος.

2. Ο υπεύθυνος της επιτροπής αγώνα κατά της ρύπανσης μιας λίμνης έχει για κύριο έργο του τον έλεγχο του περιορισμού των τοξικών ουσιών που ρυπαίνουν τη λίμνη, στα ανεκτά όρια που προβλέπει ο νομοθέτης. Τρεις βιομηχανικές μονάδες πετούν τα απόβλητά τους στη λίμνη. Αυτά τα απόβλητα περιέχουν χημικές ουσίες ιδιαίτερα επικίνδυνες, όπως άλατα μόλυβδου (Pb), υδραργύρου (Hg) και μαγγανίου (Mn). Για τον περιορισμό της ρύπανσης στα ανεκτά επίπεδα, διατίθενται δύο είδη προϊόντων (ακίνδυνα για την υγεία), το ένα βασισμένο σε θειικά άλατα, το δεύτερο βασισμένο σε νιτρικά άλατα. Τα προϊόντα αυτά αντιδρούν με τις παραπάνω τοξικές ουσίες παράγοντας τελειώς ακίνδυνα ιζήματα. Το πρόβλημα που θέτει η επιτροπή αγώνα, επικεντρώνεται στον υπολογισμό εκείνου του συνδυασμού θεικών και νιτρικών αλάτων που ελαχιστοποιεί το κόστος προστασίας ενώ παράλληλα, επιτρέπει την ικανοποίηση των οικολογικών περιορισμών. Ο υπεύθυνος της επιτροπής που αντιμετωπίζει το πρόβλημα διαθέτει τα εξής παρακάτω στοιχεία:

α) Την ποσότητα αποβλήτων και την περιεκτικότητά τους σε τοξικές ουσίες για κάθε βιομηχανία που δίνονται στον πίνακα:

Βιομηχανική Μονάδα	Όγκος και περιεκτικότητα αποβλήτων			
	Όγκος Αποβλήτων (m ³)	Συγκέντρωση (g/m ³)		
		Pb	Hg	Mn
1	1000	1.00	2.50	0.70
2	3000	0.50	0.50	1.00
3	1200	1.25	1.00	0.50

β) Την ικανότητα εξουδετέρωσης των αλάτων:

- 1 βαρέλι θεικού αλάτος εξουδετερώνει 3 κιλά αλάτων μόλυβδου, 2 κιλά αλάτων υδραργύρου και 20 κιλά αλάτων μαγγανίου,
- 1 βαρέλι νιτρικού αλάτος εξουδετερώνει 5 κιλά αλάτων μόλυβδου, 12.5 κιλά αλάτων υδραργύρου και 3 κιλά αλάτων μαγγανίου.

γ) Τους οικολογικοί περιορισμούς:
Οι μέγιστες ποσότητες τοξικών ουσιών στα νερά, που επιτρέπει η νομοθεσία μετά την εφαρμογή μέτρων κατά της μόλυνσης, είναι:

- άλας μόλυβδου: 1 κιλό
- άλας υδραργύρου: 0.2 κιλά
- άλας μαγγανίου: 1.3 κιλά

Υποτίθεται ότι η φύση καταστρέφει από μόνη της καθημερινά αυτές τις ποσότητες, δεν μπορεί όμως να καταστρέψει περισσότερο.

δ) Το κόστος προϊόντων εξουδετέρωσης

- 1 βαρέλι νιτρικού αλάτος κοστίζει 3000 χρηματικές μονάδες (χ.μ)
- 1 βαρέλι θεικού αλάτος κοστίζει 3000 (χ.μ)

Το πρόβλημα της επιτροπής συνίσταται στην εναλλακτική επιλογή θεικών ή/ και νιτρικών αλάτων που ελαχιστοποιούν το κόστος προστασίας της λίμνης

3. Από μια εταιρεία κατασκευής χαρτιού ζητήθηκε η παραγωγή χαρτιού σε ρολό μήκους 150 cm και πλάτους 1.5, 2.5 και 3.5 cm. Τα μηχανήματα όμως της εταιρεία μπορούν να παράγουν ρολά χαρτιού οποιουδήποτε μήκους αλλά πλάτους αποκλειστικά 10 cm και συνεπώς η εταιρεία πρέπει να κόψει τα παραγόμενα ρολά στις ζητούμενες προδιαγραφές (πλάτους).

Α. Αν οι ελάχιστες απαιτήσεις της αγοράς ανέρχονται σε 1000 ρολά πλάτους 1.5 cm, 2000 ρολά πλάτους 2.5 cm και 4000 ρολά πλάτους 3.5 cm υποδείξτε ένα π.γ.π. για την εύρεση του συνολικού αριθμού ρολών χαρτιού που πρέπει να παραχθούν έτσι ώστε οι απώλειες σε χαρτί της εταιρείας να είναι οι ελάχιστες δυνατές

B. Τι αλλάζει αν το ενδιαφέρον της εταιρείας επικεντρωθεί μόνο στην εύρεση του ελάχιστου δυνατού συνολικού αριθμού ρολών χάρτου που πρέπει να παραχθεί (κάτω από τις ίδιες απαιτήσεις της αγοράς); Δώστε το νέο π.γ.π

4. Ο διευθυντής παραγωγής ενός εργοστασίου χημικών προσπαθεί να φτιάξει το πρόγραμμα απασχόλησης του προσωπικού του. Κάθε μέρα περιλαμβάνει τρεις βάρδιες (00:01-08:00 (νυχτερινή), 08:01-16:00 (πρωινή), 16:01-24:00 (απογευματινή)). Το εργοστάσιο λειτουργεί σε 24ωρη βάση και ο ελάχιστος αριθμός εργατών που απαιτείται σε κάθε βάρδια για μια οποιαδήποτε εβδομάδα δίνεται στον επόμενο πίνακα:

	ΔΕΥΤ	ΤΡΙΤ	ΤΕΤ	ΠΕΜ	ΠΑΡ	ΣΑΒ	ΚΥΡ
ΝΥΚΤΕΡΙΝΗ	5	3	2	4	3	2	2
ΠΡΩΙΝΗ	7	8	9	5	7	2	5
ΑΠΟΓΕΥΜΑΤΙΝΗ	9	10	10	7	11	2	2

Το πλάνο εργασίας των υπαλλήλων πρέπει να πληρεί τους ακόλουθους όρους: (1) κάθε υπάλληλος εργάζεται σε συγκεκριμένη βάρδια (είτε νυχτερινή είτε πρωινή είτε απογευματινή) και παραμένει σε αυτή κάθε μέρα που εργάζεται. (2) Κάθε υπάλληλος δουλεύει τέσσερις συνεχόμενες ημέρες στη διάρκεια της εβδομάδας και μετά παίρνει ρεπό.

Συνολικά στο εργοστάσιο απασχολούνται 60 υπάλληλοι. Να διατυπωθεί το π.γ.π που ελαχιστοποιεί το συνολικό αριθμό υπαλλήλων που απασχολεί εβδομαδιαίως στο εργοστάσιο.

5. Δίνεται το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \max & -x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Να βρείτε γραφικά τον χώρο των εφικτών λύσεων και τις κορυφές του, σχεδιάζοντας τις ευθείες των περιορισμών.
2. Να βρείτε με αλγεβρικό τρόπο το πολύ δυο από τις κορυφές του συνόλου των εφικτών λύσεων του προβλήματος, διατυπώνοντας με προσοχή την διαδικασία που θα ακολουθήσετε. Να πάρετε τις προβολές των κορυφών αυτών στο επίπεδο x_1, x_2 (θα ταυτισθούν με κάποια από τα σημεία που έχετε βρει στο ερώτημα 1). Να εντοπίσετε τα ζεύγη των ευθειών των περιορισμών, που σαν τομές τους προκύπτουν οι προβολές, στο επίπεδο x_1, x_2 , των κορυφών που έχετε βρει. Αν στην προσπάθειά σας να βρείτε τις δυο κορυφές με αλγεβρικό τρόπο βρείτε κάποια λύση που δεν είναι βασική εφικτή, για αυτή τη λύση πάρετε την προβολή της στο επίπεδο x_1, x_2 και στην συνέχεια προσπαθήστε να εντοπίσετε τις δυο ευθείες που ορίζουν αυτό το σημείο ως τομή. Που περιμένετε να τέμνονται αυτές οι ευθείες; Μέσα στο χώρο των εφικτών λύσεων ή έξω από αυτόν; Αντίστροφα από την γραφική παράσταση που θα κάνετε στο ερώτημα 1, να εντοπίσετε δυο ευθείες περιορισμών που τέμνονται σε σημείο έξω από τον χώρο των εφικτών λύσεων. Μετά προσπαθήστε να βρείτε την βασική λύση που η προβολή της στο επίπεδο x_1, x_2 αντιστοιχεί σε αυτό το σημείο. Ελέγξτε τις συντεταγμένες αυτής της βασικής λύσης. Θα διαπιστώσετε ότι αυτή η λύση δεν είναι εφικτή. Συσχετίστε την θέση της προβολής, με το γεγονός ότι η λύση δεν είναι εφικτή.
3. Να βρείτε γραφικά τη λύση μεγίστου καθώς και το μέγιστο που ζητείται. Δικαιολογήστε με προσοχή την πορεία με αναφορά στο θετικό και αρνητικό ημιεπίπεδο στο οποίο κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο.
4. Ποιες είναι οι τιμές των μεταβλητών περιθωρίου στη βέλτιστη λύση. Ποιοι περιορισμοί είναι ενεργοί και ποιοι όχι στη βέλτιστη λύση.
5. Ποια είναι η λύση και η τιμή της Α.Σ. αν στον περιορισμό (3) τεθεί 6 αντί 3. (Η απάντηση να δοθεί με γραφική επίλυση)
6. Χρησιμοποιώντας την απάντηση στη ερώτηση (5) να βρεθεί, πάλι γραφικά, η αύξηση της Α.Σ. αν το 3 αντικατασταθεί με το 4, 5, 6. Μπορεί βασιζόμενοι μόνο στην απάντηση σε αυτό το ερώτημα να συμπεράνετε αναλογικά αύξηση της τιμής της Α.Σ. σε αυξήσεις του συντελεστή b_3 ; (Αυτή η αύξηση της Α.Σ. όταν αυξάνεται κατά μία μονάδα ο πόρος b_3 λέγεται δυϊκή τιμή (Dual price) του πόρου 3)